12 1990

0 3 0

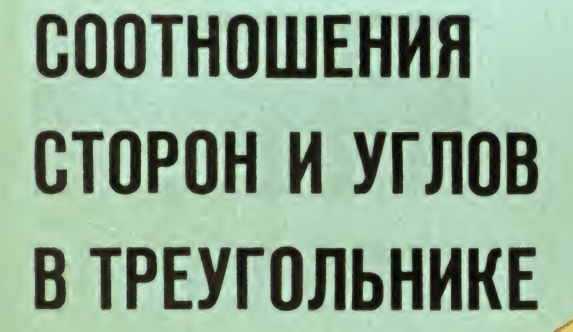
ТУ-19-241-82

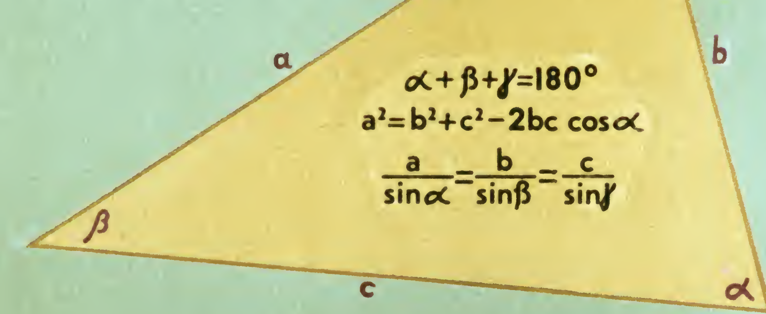
5

2


студия
ДИАФИЛЬМ

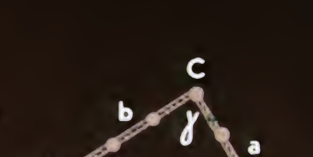
07—3—673

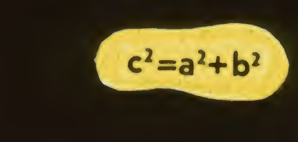




Диафильм по геометрии
для IX класса

К треугольнику какого вида применимы эти формулы?





$\alpha+\beta=90^\circ$

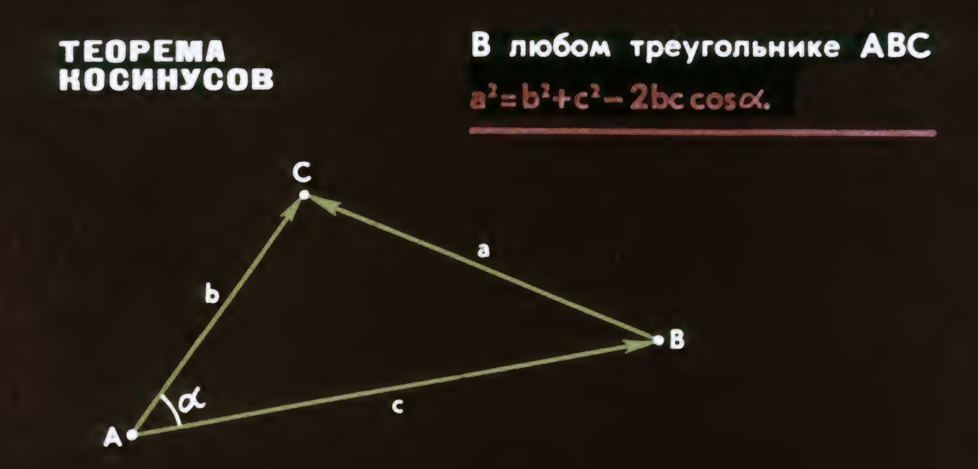
$\sin\alpha=\frac{a}{c}$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}$

Сколько элементов треугольника нужно знать, чтобы найти все остальные элементы?

	a	b	c	α	β	γ
1.	3	4				90°
2.		1		30°		90°
3.			2		45°	90°

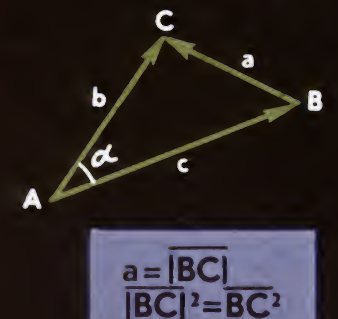
Будем доказывать соотношения, справедливые не только для прямоугольного, но и для любого треугольника.



Подумайте, как доказать эту теорему, используя скалярное произведение векторов.

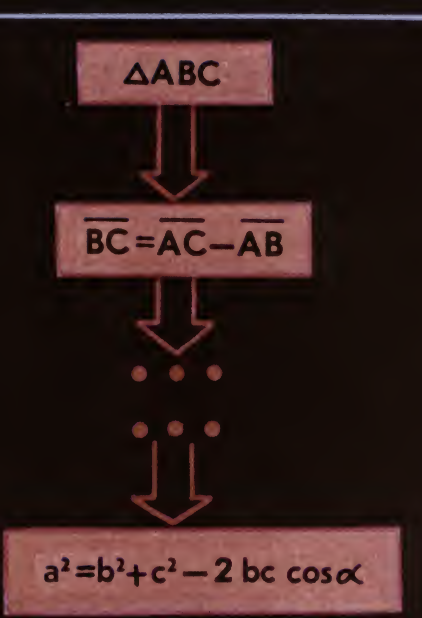
Докажем теорему косинусов, используя скалярное произведение векторов.

ДАНО:



$a = |\overline{BC}|$

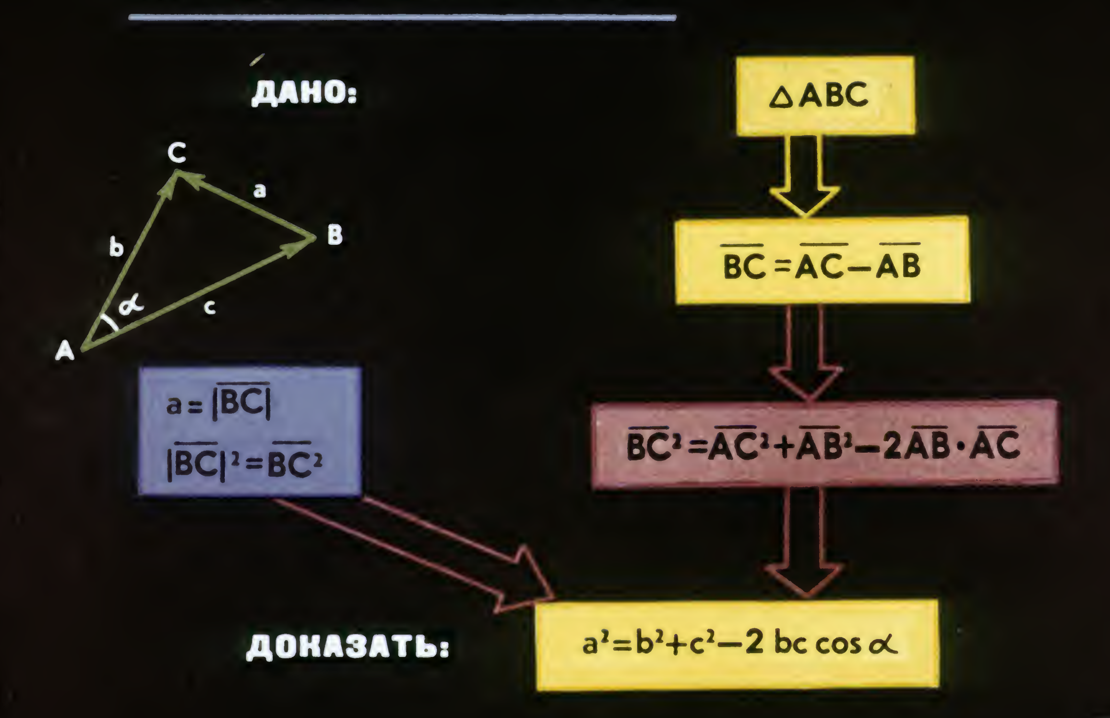
$|\overline{BC}|^2 = \overline{BC}^2$



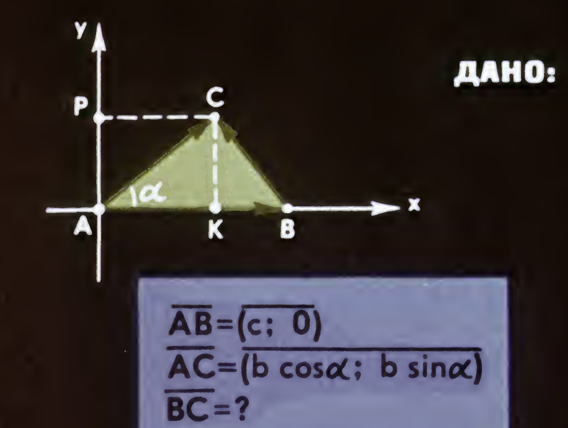
ДОКАЗАТЬ:

Закончите доказательство.

Проверьте свое доказательство.

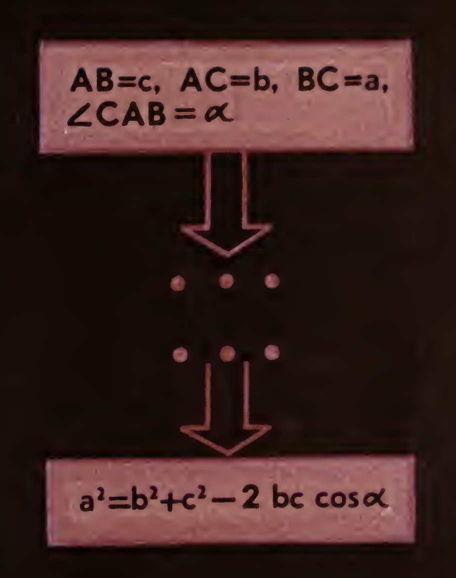


Теорему косинусов можно доказать, используя координаты векторов.



$\overline{AB} = \overline{(c;\ 0)}$
$\overline{AC} = \overline{(b\cos\alpha;\ b\sin\alpha)}$
$\overline{BC} = ?$

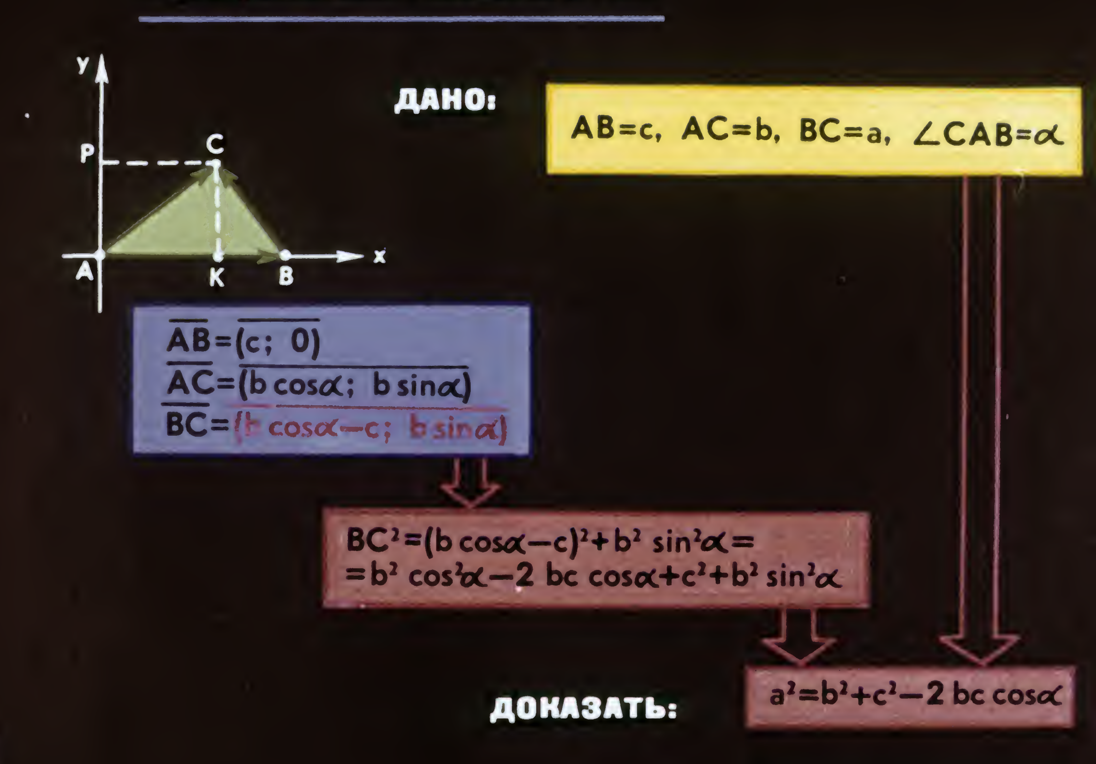
ДАНО:



ДОКАЗАТЬ:

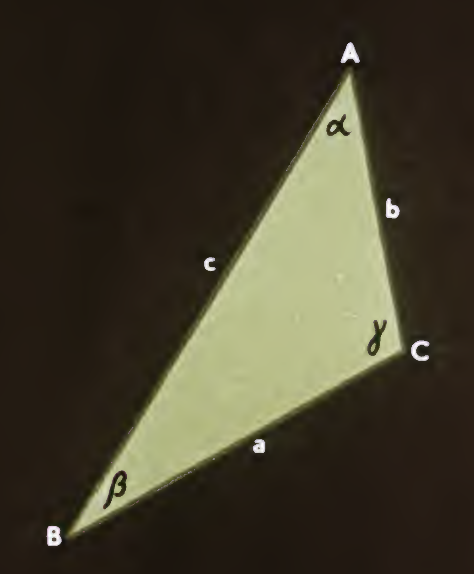
Закончите доказательство.

Проверьте свое доказательство.

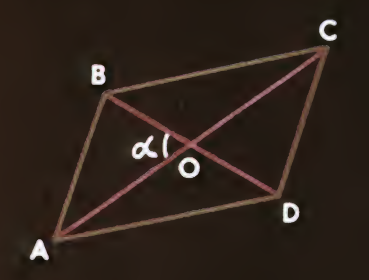


Какие из следующих задач можно решить, применяя теорему косинусов?

	Дано	Найти
1.	$b,\ c,\ \alpha$	a
2.	$a,\ b,\ \gamma$	c
3.	$a,\ c,\ \beta$	b
4.	$a,\ b,\ c$	α
5.	$a,\ b,\ \alpha$	c
6.	$a,\ \beta,\ \gamma$	b



ЗАДАЧА. Найти стороны параллелограмма, если известны его диагонали и углы между ними.

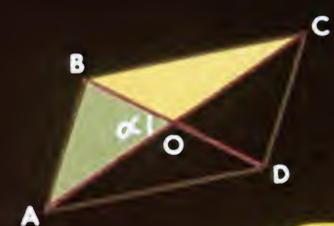


ДАНО: $AC = a$, $BD = b$, $\angle AOB = \alpha$

Найти: AB, BC, CD, DA.

Попробуйте решить задачу, используя теорему косинусов.

А теперь проверьте свое решение.



$AC = a$,
$BD = b$,
$\angle AOB = \alpha$

AB, BC, CD, DA — ?

Решение.

1. $BO = OD = \frac{b}{2}$, $AO = OC = \frac{a}{2}$.

2. $AB^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cos\alpha$,

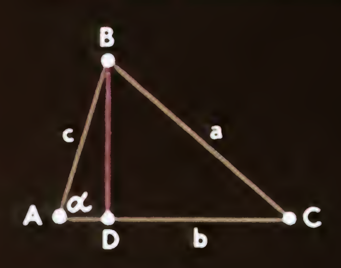
$BC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cos\alpha$.

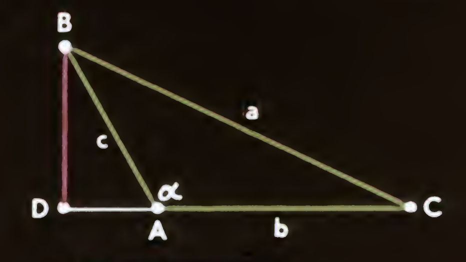
Ответ: $AB = DC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{2}$.

$BC = AD = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2}$.

Следствие 1 теоремы косинусов

Если BD—высота в $\triangle ABC$, то $a^2=b^2+c^2\pm 2b\cdot AD$.





$AD=c\cos\alpha$

$a^2=b^2+c^2-2b(c\cos\alpha)$

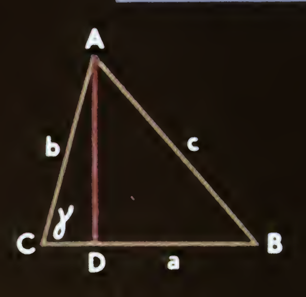
$AD=-c\cos\alpha$

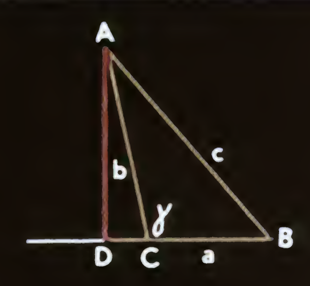
$a^2=b^2+c^2+2b(-c\cos\alpha)$

Докажите следствие 1, используя рисунки.

В каком случае в формуле $a^2=b^2+c^2\pm 2b\cdot AD$ надо брать «+», а в каком «−»?

ЗАДАЧА. Зная стороны a, b и c треугольника ABC, найти высоту, опущенную на сторону BC.

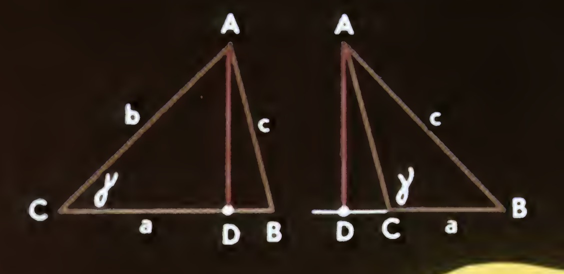




$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a \cdot CD$$

Попробуйте решить задачу, используя следствие теоремы косинусов.

А теперь проверьте свое решение.



$$\frac{AD \perp BC}{AD - ?}$$

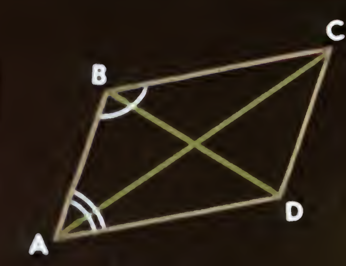
Решение.

1. $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a \cdot CD.$
2. $CD^2 = \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{\pm 2a}\right)^2.$
3. $AD^2 = b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}\right)^2.$

Ответ: $AD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}\right)^2}.$

Следствие 2 теоремы косинусов

В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.



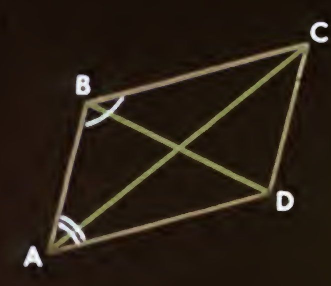
$AB = a$,
$BC = b$,
$AC = d_1$,
$BD = d_2$.

Докажем следствие 2.

1. Сумма квадратов диагоналей — это $d_1^2 + d_2^2$.
2. Сумма квадратов сторон — это ...

Какие треугольники надо рассмотреть, чтобы закончить доказательство?

Объясните и закончите доказательство следствия 2.



$AB=a$,
$BC=b$,
$AC=d_1$,
$BD=d_2$.

1. Сумма квадратов диагоналей — это $d_1^2+d_2^2$.
2. Сумма квадратов сторон — это $2a^2+2b^2$.
3. Из $\triangle ABC$: $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos B$.
   Из $\triangle BAD$: $d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos A$.

   $d_1^2+d_2^2 = \dots$
4. Но $\cos B = \dots$
5. Значит, $d_1^2+d_2^2 = \dots$

Не всегда теорема косинусов позволяет найти неизвестные элементы треугольника по трем данным. Например, она не поможет, если даны сторона и два угла. (Почему?)

В этом случае нужна теорема синусов.

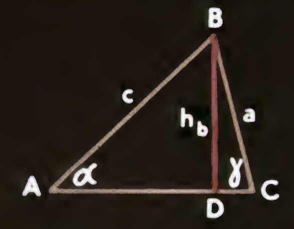
В любом треугольнике ABC

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$$

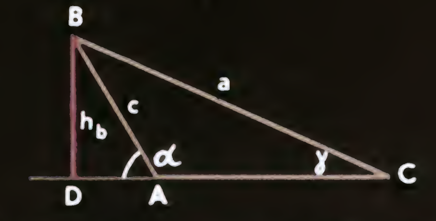


Для доказательства проведем высоту BD. Как может располагаться точка D на прямой AC?

Докажем, что $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c}$.



или



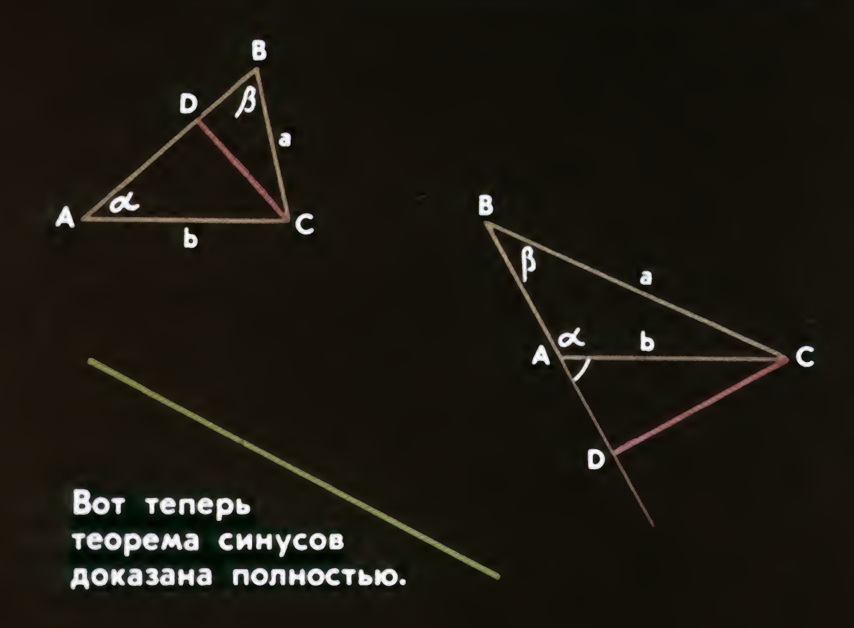
Из $\triangle ABD$: $h_b = c\sin\alpha$.
Из $\triangle BDC$: $h_b = a\sin\gamma$.

Из $\triangle ABD$: $h_b = c\sin(180^\circ-\alpha) = c\sin\alpha$.
Из $\triangle BDC$: $h_b = a\sin\gamma$.

В обоих случаях $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c}$.

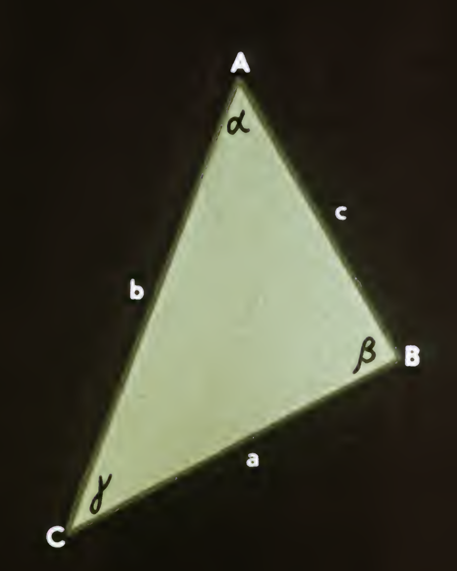
Что еще нужно, чтобы закончить доказательство теоремы синусов?

Докажите по чертежам, что $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$.



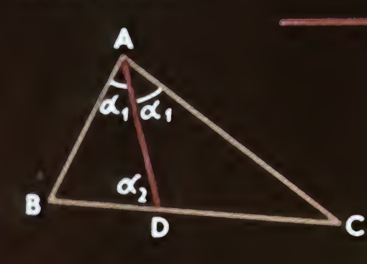
Какие из следующих задач можно решить, применяя теорему синусов?

	Дано	Найти
1.	a, b, α	β
2.	a, b, α	γ
3.	a, β, γ	b
4.	b, c, γ	β
5.	a, b, c	α



Следствие 1 теоремы синусов

Если AD—биссектриса треугольника ABC, то $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

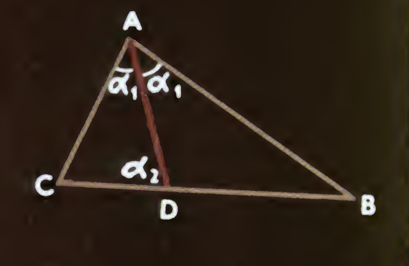


Доказательство.

1. Из $\triangle ABD$: $\frac{\sin\alpha_1}{BD}=\frac{\sin\alpha_2}{AB}$.
2. Из $\triangle ADC$: $\frac{\sin\alpha_1}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha_2)}{AC}$.
3. Значит, ...

Закончите доказательство.

Объясните каждый шаг в доказательстве следствия 1.



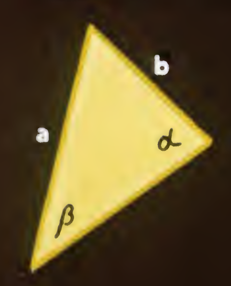
1. Из $\triangle ABD$: $\dfrac{\sin\alpha_1}{BD}=\dfrac{\sin\alpha_2}{AB}$.
2. Из $\triangle ADC$: $\dfrac{\sin\alpha_1}{DC}=\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha_2)}{AC}$.
3. Значит,
   $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{DC}{AC}$.
4. Поэтому
   $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2 теоремы синусов

В треугольнике ABC
$(\alpha > \beta) \Longleftrightarrow (a > b)$.

Доказеем, что если $\alpha > \beta$, то $a > b$.
Возможны два случая.

1. $\beta < \alpha < 90°$.

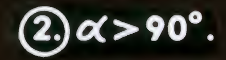


Тогда $\sin\beta < \sin\alpha$.

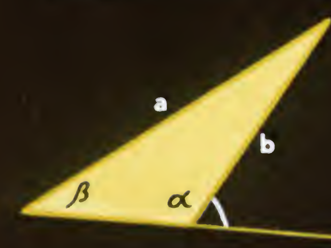
$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

Объясните, почему в этом случае $b < a$.

Какой второй случай надо рассмотреть?



Тогда $180° - \alpha < 90°$,
а $180° - \alpha < \beta$. (Почему?)
Значит,
$\sin(180° - \alpha) > \sin\beta$,
$\sin\alpha > \sin\beta$.



$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

Объясните, почему и в этом случае $a > b$.

Для завершения доказательства следствия 2 докажите, что если $a > b$, то $\alpha > \beta$.

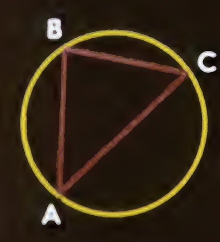


Следствие 3 теоремы синусов

В треугольнике ABC

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$ где

R — радиус описанной окружности.



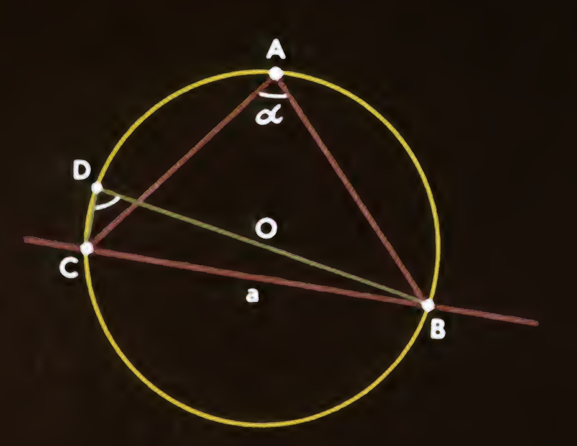
Достаточно доказать,

что $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$. (Почему?)

Для этого проведем через точку B диаметр описанной окружности BD.

Как могут быть расположены точки A и D относительно прямой BC?

Первый случай

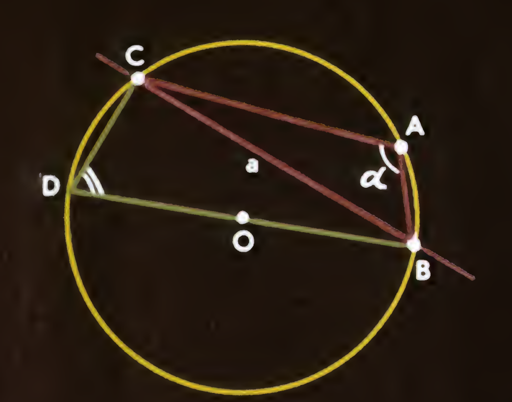


$\angle A = \angle D$, $\angle BCD = 90°$.
(Почему?)

Значит, $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.
(Почему?)

Какой второй случай нужно рассмотреть?

Второй случай



$\angle D = 180° - \angle A$,
$\angle DCB = 90°$. (Почему?)

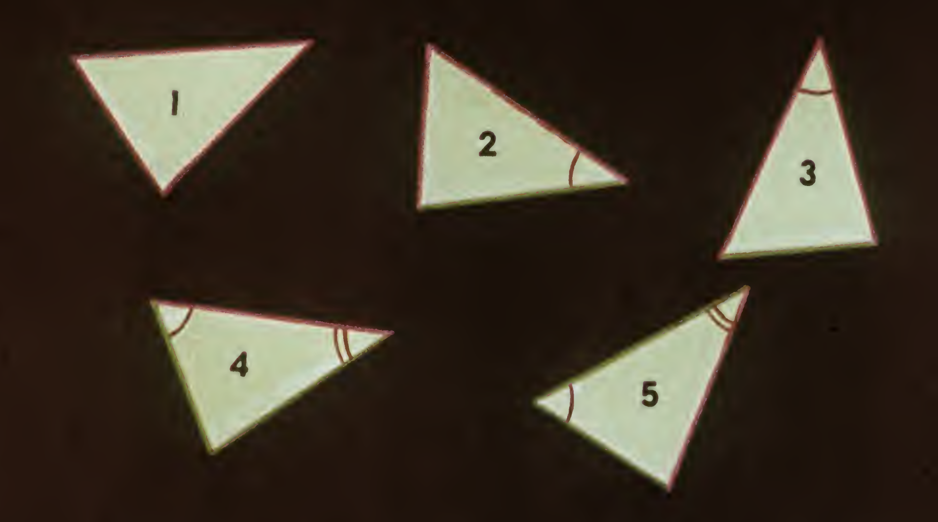
Значит,

$2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. (Почему?)

Итак, в любом случае

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Следствие 3 доказано.

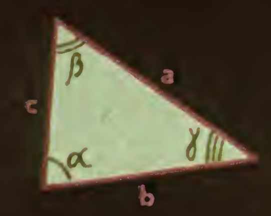


Какие три элемента треугольника достаточно знать, чтобы вычислить все остальные (как говорят, «решить треугольник»)? Перечислите все возможные случаи.



ЗАДАЧА 1

Дано: a, b, c. Найти α, β, γ.



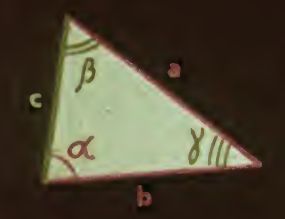
Решение.

1. $\cos\alpha = \ldots$ (по теореме косинусов).
2. $\cos\beta = \ldots$ (по теореме ...).
3. $\gamma = 180° - \ldots$ (по теореме ...).

В каком случае задача имеет решение? Сколько решений?

ЗАДАЧА 2

Дано: a, b, α. Найти c, β, γ.



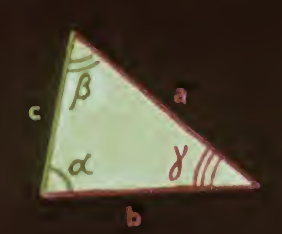
Решение.

1. $\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$ (по теореме ...).
2. $\gamma = 180° - \ldots$ (по теореме ...).
3. $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin a}$ (по ...).

В каком случае задача имеет решение? Сколько решений?

ЗАДАЧА 3

Дано: a, b, γ. **Найти:** c, α, β.



Решение.

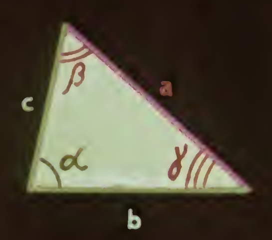
1. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
   (по теореме ...).
2. $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{c}$
   (...).
3. $\beta =$ ...
   (...).

В каком случае задача имеет решение? Сколько решений?



ЗАДАЧА 4

Дано: a, β, γ. Найти: b, c, α.



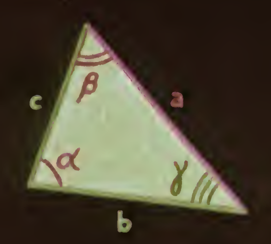


1. $\alpha = 180^\circ - \ldots$
   $(\ldots)$.
2. $b = \dfrac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$.
   $(\ldots)$
3. $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$.
   $(\ldots)$

В каком случае задача имеет решение?
Сколько решений?

ЗАДАЧА 5

Дано: a, α, β. Найти b, c, γ.



Решение.

1. $\gamma = \ldots$
2. $b = \ldots$
3. $c = \ldots$

Чем отличается эта задача от предыдущей?

К сведению учителя

Данный диафильм рассчитан на работу по учебнику А. В. Погорелова. Однако он может почти полностью использоваться и при работе по учебнику Л. С. Атанасяна и др. Доказательство теоремы синусов и основные задачи на решение треугольников изучаются одинаково в обоих названных курсах. Доказательство теоремы косинусов по учебнику А. В. Погорелова проводится с помощью кадров 4—5, а по учебнику Л. С. Атанасяна—с помощью кадров 6—7 (в этом случае кадры 4—5 просто пропускаются). При работе по учебнику Л. С. Атанасяна пропускаются также все кадры, связанные со следствиями теорем синусов и косинусов, поскольку эти следствия изучаются в других частях курса.

КОНЕЦ

Диафильм создан по программе средней общеобразовательной школы

Автор кандидат
педагогических наук **Е. АРУТЮНЯН**
Художник-оформитель **В. ЕРМОЛАЕВА**
Редактор **В. ЧЕРНИНА**

Д-023-90

103062, Москва, Старосадский пер., 7